超流動ヘリウム薄膜におけるソリトン(物性におけるソリトンの統計力学とダイナミックス,科研費研究会報告)

超流動ヘリウム薄膜におけるソリトン

物性研　栗原 進

超流動^4Heの薄膜における微小な膜厚変化は，第3音波として知られる線型波動であり，超流動研究の重要な手段の1つである。膜厚振動の主要な復元力は，van der Waals力であるが，この力は膜厚の関数として本質的な非線型性をもっている。従って，膜厚変化の振巾を大きくしてゆく時，第3音波に顕著な非線型性があらわれると期待される。特に，分散効果とうまくつりあえば，ソリトンの存在する可能性がある。この点を調べるために行った幾つかの計算を，まとめて報告する。

(I) 非線型性が弱い場合の流体力学的な取り扱い[1]

この場合は，浅水波の場合と同様の reductive perturbation の方法により，膜厚$\eta(x,t)$がKdV方程式　$\eta_t - 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0$　を満たす事がわかる。但し，長さ及び時間は適当にスケールしてある。この方程式の初期値問題　$\eta(x,0) \to \eta(x,t)$の解は逆散乱法によりすでに得られており，特に$t\to\infty$での漸近形は，Schrödinger方程式　$[-d^2/dx^2+\eta(x,0)]\psi_n(x) = (-E_n)\psi_n(x)$　の束縛状態の固有値E_nを用いて　$\eta(x,t) = -\sum_n 2E_n \,\mathrm{sech}^2(x-4E_n t)$　と書ける。実験で励起しうる波の波長が，膜厚に比べて4ケタ以上も大きいため，$\{E_n\}$は準連続スペクトルをなす。この事がヘリウム薄膜の特殊性であり，浅水波と異なる所である。時空の粗視化を行うと，$\eta(x,t) = -(1/2t)(x/4t)^{1/2}\, N(x/4t)$　が得られる。但し$N(E)$は準連続スペクトル$\{E_n\}$の状態密度である。粗視化されたηは，多数のソリトンの envelope であり，実験で直接観測可能な量である。粗視化にもかかわらず，この解はKdV方程式がもつ保存則とスケール不変性を正確に満たしている。このenvelope関数を測定する試みが河野等[2]によってなされており，理論の予測に近い結果も出ているがまだ確かな事はわからない。

(II) 非線型性が任意に強い場合[3],[4]

この場合，流体力学的な取り扱いは適当でないので，Rutledge等[5]に従い超流体の波動関数ψに戻って考える。適当な単位系を用いると，ψの運動方程式は

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \left[1-\left(\frac{1+d}{1+d|\psi|^2}\right)^3\right]\psi$$

となる。[ ]の中の第2項がvan der Waals力をあらわす。dはHe固相の厚さで測った平均膜厚である。膜厚の変化分ηは　$\eta = |\psi|^2-1$　で与えられる。ηの初期形をGauss型に選び，時間発展を数値的に求めた結果を図1に示す。振巾が膜厚とcomparableな程大きくなっても，衝突の際個性を保つ，非常に安定なソリトンが存在する事がわかる。

1つのソリトンに話を限れば，解析的な解も得られる。速度vで走るソリトンは，　$\xi = x - vt$，$g_0 = \sqrt{4-v^2}$，$g = (g_0/2)(|\psi|^2+1)$，$v_s = (2/v)(d\theta/d\xi)$　とおくと

$$\xi = \frac{1}{g_0}\log\left(g+\sqrt{g^2-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{g_0^2-1}}\log\left(\frac{g\sqrt{g_0^2-1}-g_0\sqrt{g^2-1}}{\sqrt{g_0^2-1}+\sqrt{g^2-1}}\right), \quad v_s = 1-\frac{1}{|\psi|^2}$$

で表わせる（但し，煩雑さを避けるため，$d=1$とおいた）。図2(a)に，$|\psi|^2\ (\equiv a^2)$及び超流動速度v_sに見られるソリトンを示す。ψのソリトンは，振巾・位相が作る2つのソリトンの複合体である事がわかる。振巾をいろいろ変えた時の$|\psi|^2$の形は図2(b)のようになる。

上の解析解は，$|\eta| \ll 1$（i.e. $||\psi|^2-1| \ll 1$）の場合にはKdVソリトンに帰着すべきであるが，実際，線型第3音波と共に動く座標系への変換と適当な時空のスケール変換を行った後

$$\eta = v_s = -2\varepsilon\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\varepsilon}\,(x-4\varepsilon t)\ , \qquad v=\sqrt{3}\,(1-\frac{\varepsilon}{3})$$

が得られ，(I)の場合への帰着が確認される。ここで，ε は非線型性の小ささを特徴づける small parameter であり，$\sqrt{3}$ は $d=1$ の場合の線型第3音波の速度である。

以上から，膜厚変化が必ずしも小さくない場合でも安定なソリトンが存在する事，そして，このソリトンが KdV ソリトンの拡張になっている事が結論される。もちろん，衝突における安定性に関しては，解析的に証明できていないので，最も厳密な意味でのソリトンであるか否かは不明である。

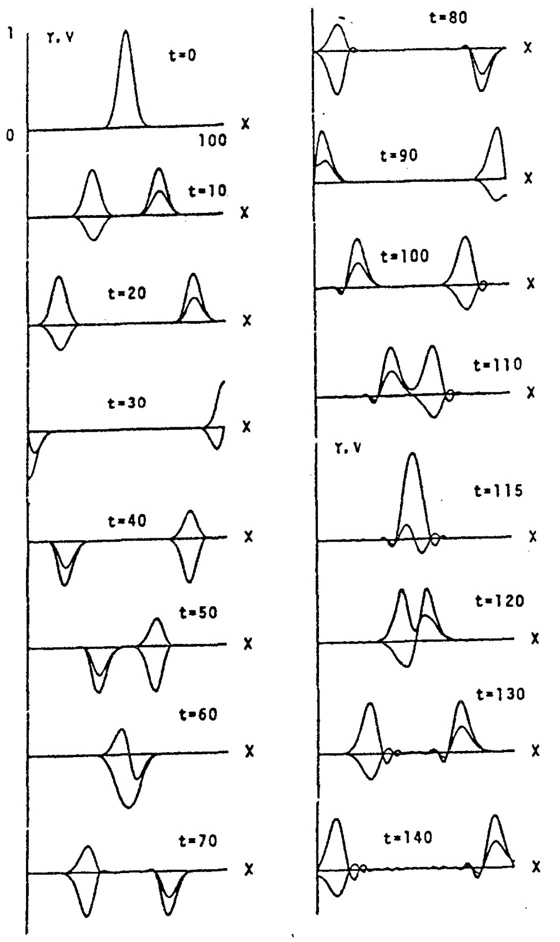

図 1

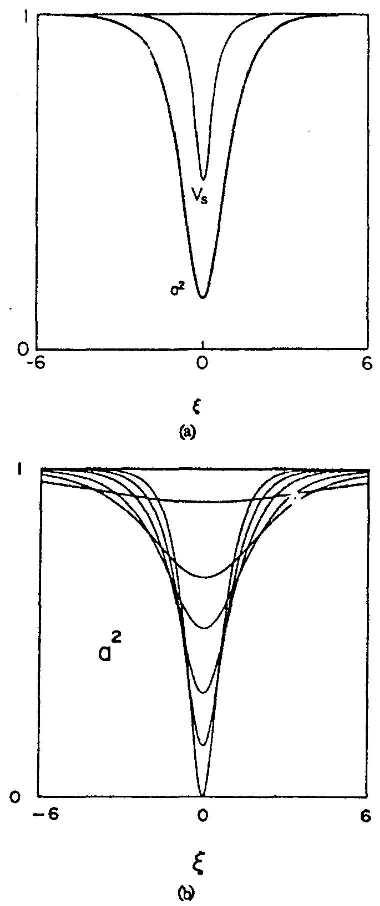

図 2.

文献

(1) Nakajima, Kurihara & Tohdoh : J. Low Temp. Phys. 39 (1980) 465.

(2) Kono, Kobayashi, & Sasaki : J. Phy. Soc. Jpn. 50 (1981) 721.

(3) Kurihara : J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3262.

(4) Kurihara : J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 3801.

(5) Rutledge, McMillan, Mochel & Washburn : Phys. Rev. B18 (1978) 2155.